

Tema 5: Números complejos.

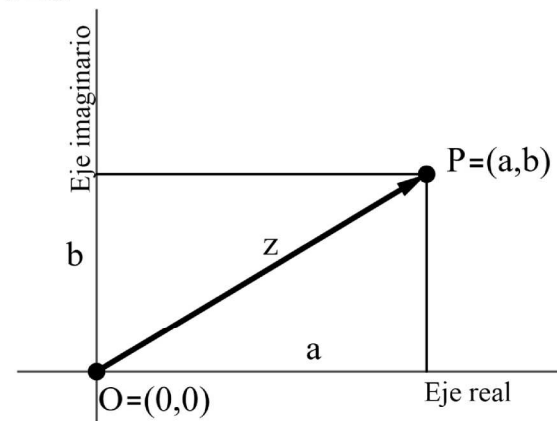
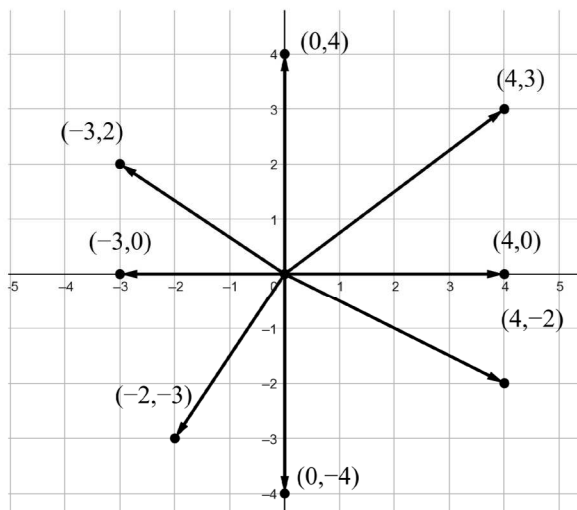
5.1 Introducción.

- Los números complejos aparecieron al intentar resolver ecuaciones de ecuaciones en cuya resolución interviene la raíz cuadrada de un número negativo. Por ejemplo, la ecuación: $x^2 + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real; pero, si se define: $i = \sqrt{-1}$, entonces la ecuación anterior tendría ahora por soluciones: $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ dentro de los números complejos.

- Un nº complejo es una expresión de la forma: $a + bi$, siendo a y b números reales, e $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. El número a se llama parte real y el número b , parte imaginaria. Claramente el conjunto de números complejos \mathbb{C} engloba al conjunto de números reales \mathbb{R} . Además, en este nuevo conjunto, cualquier ecuación de segundo grado tiene dos soluciones. Por ejemplo:

$$x^2 - 6x + 34 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-100}}{2} \Rightarrow x = \frac{6 \pm 10i}{2} = 3 \pm 5i$$

- Un número complejo $z = a + bi$ se representa a partir del punto $P = (a, b)$ mediante el vector \overrightarrow{OP} , llamado afijo. El eje horizontal es el eje real y el eje vertical es el eje imaginario. Cualquier número complejo puede expresarse en forma binómica $z = a + bi$ o bien en forma cartesiana $z = \overrightarrow{OP} = (a, b)$. Ejemplos:



- Las potencias de la unidad imaginaria se repiten de 4 en 4. Por tanto, para saber una determinada potencia, basta con dividir el exponente por 4 y considerar el resto obtenido.

$$i^n = i^{4c+r} = i^{4c} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$$

$$\begin{array}{cccc}
 i^0 = 1 & i^4 = 1 & i^8 = 1 & i^{12} = 1 \\
 i^1 = i = \sqrt{-1} & i^5 = i = \sqrt{-1} & i^9 = i = \sqrt{-1} & i^{13} = i = \sqrt{-1} \\
 i^2 = -1 & i^6 = -1 & i^{10} = -1 & i^{14} = -1 \\
 i^3 = -i & i^7 = -i & i^{11} = -i & i^{15} = -i
 \end{array}$$

5.2 Operaciones en forma binómica.

- Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Ejemplo: $2 + 3i + (-4 + i) = -2 + 4i$
- Resta: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Ejemplo: $2 + 3i - (-4 + i) = 6 + 2i$
- Producto: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$
Ejemplo: $(2 + 3i) \cdot (-4 + i) = -8 + 2i - 12i + 3i^2 = -8 - 3 + (2 - 12)i = -11 - 10i$
- Cociente: para dividir dos números complejos se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador (el conjugado consiste en cambiar el signo intermedio, o sea, el conjugado de $a \pm bi$ es $a \mp bi$).

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

$$\text{Ejemplo: } \frac{2 + 3i}{-4 + i}$$

$$\frac{(2 + 3i)(-4 - i)}{(-4 + i)(-4 - i)} = \frac{-8 - 2i - 12i - 3i^2}{(-4)^2 - i^2} = \frac{-8 + 3 + (-2 - 12)i}{16 + 1} = \frac{-5 - 14i}{17} = -\frac{5}{17} - \frac{14}{17}i$$

- Potencia:
 $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$
Ejemplo: $(1 + 3i)^2 = 1 + 6i + 3i^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$
- Raíz cuadrada:

$$\sqrt{a + bi} = x + yi \Rightarrow a + bi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Y se resuelve el sistema.

$$\text{Ejemplo: } \sqrt{-5 + 12i}$$

$$\sqrt{-5 + 12i} = x + yi \Rightarrow -5 + 12i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases}$$

$$y = \frac{6}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = -5 \Rightarrow x^4 - 36 = -5x^2 \Rightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

Hacemos ahora el cambio de variable: $z = x^2$, con lo que la ecuación pasa a ser de 2º grado y se obtiene z ; y, después: $x = \pm\sqrt{z}$. $z^2 + 5z - 36 = 0$.

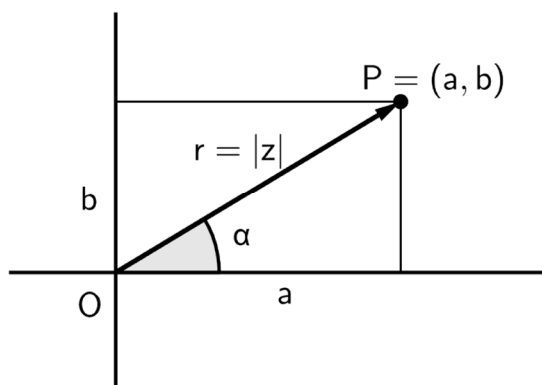
$$z = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2} = \begin{cases} z = 4 \\ z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } z = 4 & x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ \text{Si } z = -9 & x = \text{no existe. Es un n}^\circ \text{ real} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Si } x = 2 & y = 3 \\ \text{Si } x = -2 & y = -3 \end{cases}$$

Luego, las soluciones son: $2 + 3i$ y $-2 - 3i$.

5.3 Expresión polar de un número complejo.

- Un número complejo $z = a + bi$ queda perfectamente determinado si conocemos a y b , que son las coordenadas de su vector afijo. También quedaría determinado el número complejo si conocemos el módulo r de su vector afijo y el ángulo α que forma con el eje positivo de abscisas. Es decir:



$$z = a + bi = r_{\alpha}$$

Siendo r el **módulo** de z .

Y α el ángulo o **argumento** de z .

Paso de: binómica \Rightarrow polar

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

deberá ser un ángulo del cuadrante donde está el punto $P = (a, b)$.

Paso de: polar \Rightarrow binómica

Sabemos que $z = r_{\alpha}$

$$a = r \cdot \cos \alpha ; \quad b = r \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Luego: $z = r \cdot \cos \alpha + r \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot i$

Ejemplo: expresar en forma polar el número $z = 3 + 4i$.

$$r = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 53^{\circ}07'48,37'' \Rightarrow z = 5_{53^{\circ}07'48,37''}$$

Ejemplo: expresar en forma binómica el número $z = 2_{30^{\circ}}$.

$$a = 2 \cdot \cos 30^{\circ} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} ; \quad b = 2 \cdot \operatorname{sen} 30^{\circ} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow z = \sqrt{3} + i$$

5.4 Operaciones en forma polar. Potencias y raíces.

- Producto en forma polar:

$$\begin{aligned} r_{\alpha} \cdot r'_{\beta} &= r(\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha) \cdot r'(\cos \beta + i \cdot \operatorname{sen} \beta) = \\ &= r \cdot r' [(\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)] = \\ &= r \cdot r' [\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)] = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

Es decir, para multiplicar dos números complejos: se multiplican los módulos y se suman los argumentos: $r_\alpha \cdot r_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$

- Cociente en forma polar:

$$\begin{aligned} \frac{r_\alpha}{r'_\beta} &= \frac{r(\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)}{r'(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)} = \frac{r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)}{r'(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)(\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)} = \\ &= \frac{r(\cos \alpha \cos \beta - i \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta + i \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - i^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta)}{r'(\cos^2 \beta - i^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \beta)} = \\ &= \frac{r[(\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta)]}{r' \cdot 1} = \\ &= \frac{r}{r'} [(\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)] = \\ &= \frac{r}{r'} [\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)] = \left(\frac{r}{r'} \right)_{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

Es decir, para dividir dos números complejos: se dividen los módulos y se restan los argumentos: $\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'} \right)_{\alpha - \beta}$

- Potencia en forma polar:

Por la fórmula del producto, tenemos: $(r_\alpha)^n = r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \dots \cdot r_\alpha = r^{n\alpha}$

Es decir, para elevar un número complejo a una potencia: se eleva el módulo y se multiplica el argumento por el exponente: $(r_\alpha)^n = r^{n\alpha}$.

Utilizando la fórmula anterior para un número complejo de módulo 1, se demuestra una igualdad trigonométrica conocida como fórmula de Moivre:

$$(1_\alpha)^n = 1^{n\alpha} \Rightarrow (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)$$

- Raíces en forma polar:

Supongamos que queremos calcular la raíz n-ésima de un número complejo $\sqrt[n]{R_\beta}$, y supongamos que una de las soluciones es r_α . Como $\sqrt[n]{R_\beta} = r_\alpha$, por definición de raíz n-ésima, deberá verificarse:

$$(r_\alpha)^n = R_\beta \Rightarrow r^{n\alpha} = R_\beta \Rightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \alpha = \frac{\beta}{n} \end{cases}$$

Es decir, para obtener la raíz n-ésima de un número complejo: se hace la raíz del módulo y se divide el argumento por el índice: $\sqrt[n]{R_\beta} = \sqrt[n]{R} \frac{\beta}{n}$.

Al hallar una raíz n-ésima de un número complejo, aparecen exactamente n soluciones. Estas soluciones se obtienen sumando múltiplos de 360° al ángulo β antes de dividir entre n.

Es decir, hay n ángulos que se calculan así: $\alpha = \frac{\beta + k \cdot 360^\circ}{n}$.

- En una raíz cuadrada hay dos soluciones que se diferencian en 180° .
- En una raíz cúbica hay tres soluciones que se diferencian en 120° .
- En una raíz cuarta hay cuatro soluciones que se diferencian en 90° .
- En una raíz quinta hay cinco soluciones que se diferencian en 72° .

- Las operaciones en forma polar son especialmente útiles para hallar potencias y raíces que resultarían mucho más difíciles de obtener en forma binómica.

Ejemplo: ya vimos al operar en forma binómica que el cuadrado era:

$$(1 + 3i)^2 = 1 + 6i + 3i^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i .$$

Veámoslo ahora en forma polar:

$$\text{Si } z = a + bi \Rightarrow r = |z| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \quad \text{y} \quad \alpha = \arctg 3 = 71^\circ 33' 54,18'' .$$

Es decir, el número en forma polar es: $z = \sqrt{10}_{71^\circ 33' 54,18''}$. Su cuadrado es:

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\sqrt{10}_{71^\circ 33' 54,18''} \right)^2 = 10_{143^\circ 07' 48,37''} = 10(\cos 143^\circ 07' 48,37'' + i \operatorname{sen} 143^\circ 07' 48,37'') = \\ &= 10(-0,8 + i \cdot 0,6) = -8 + 6i \end{aligned}$$

Sin embargo, si consideramos potencias mayores, los cálculos se complican notablemente.

Por ejemplo, veamos otra potencia del mismo número: $(1 + 3i)^6$

$$\begin{aligned} z^6 &= \left(\sqrt{10}_{71^\circ 33' 54,18''} \right)^6 = 1000_{69^\circ 23' 25,11''} = 1000(\cos 69^\circ 23' 25,11'' + i \operatorname{sen} 69^\circ 23' 25,11'') = \\ &= 1000(0,352 + i \cdot 0,936) = 352 + 936i \quad \text{y sería complicado en forma binómica.} \end{aligned}$$

Ejemplo: ya vimos al operar en forma binómica que la raíz cuadrada del número: $z = -5 + 12i$, resultaba: $\sqrt{-5 + 12i} = \pm(2 + 3i)$.

$$\text{Si } z = -5 + 12i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13 \quad \text{y} \quad \arctg\left(-\frac{12}{5}\right) = 112^\circ 37' 11,51'' .$$

Es decir, el número en forma polar es: $z = 13_{112^\circ 37' 11,51''}$. Su raíz es la siguiente:

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= \sqrt{13_{112^\circ 37' 11,51''}} = \begin{cases} \sqrt{13_{\frac{112^\circ 37' 11,51''}{2}}} \\ \sqrt{13_{\frac{112^\circ 37' 11,51'' + 360^\circ}{2}}} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{13_{56^\circ 18' 35,76''}} \\ \sqrt{13_{236^\circ 18' 35,76''}} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \sqrt{13(\cos 56^\circ 18' 35,76'' + i \operatorname{sen} 56^\circ 18' 35,76'')} \\ \sqrt{13(\cos 236^\circ 18' 35,76'' + i \operatorname{sen} 236^\circ 18' 35,76'')} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{13}(0,5547 + 0,832i) \\ \sqrt{13}(-0,5547 - 0,832i) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 2 + 3i \\ -2 - 3i \end{cases} . \quad \text{Que es el mismo resultado obtenido en forma binómica.} \end{aligned}$$

Sin embargo, si consideramos raíces mayores, es imprescindible utilizar la forma polar para realizar los cálculos. Ejemplo: calcular $\sqrt[4]{-5 + 12i}$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{13_{112^\circ 37' 11,51''}} = \begin{cases} \sqrt[4]{13_{\frac{112^\circ 37' 11,51''}{4}}} \\ \sqrt[4]{13_{\frac{112^\circ 37' 11,51'' + 360^\circ}{4}}} \\ \sqrt[4]{13_{\frac{112^\circ 37' 11,51'' + 720^\circ}{4}}} \\ \sqrt[4]{13_{\frac{112^\circ 37' 11,51'' + 1080^\circ}{4}}} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt[4]{13_{28^\circ 09' 17,88''}} \\ \sqrt[4]{13_{118^\circ 09' 17,88''}} \\ \sqrt[4]{13_{208^\circ 09' 17,88''}} \\ \sqrt[4]{13_{298^\circ 09' 17,88''}} \end{cases}$$